

Homework 5 - Stochastic Differential Equations

1. 求解随机微分方程

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t.$$

2. 求解随机微分方程

$$dY_t = r dt + \alpha Y_t dB_t,$$

其中 r, α 为常数, $B_t \in \mathbb{R}$.

3. 证明Kolmogorov forward equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{s,t} f = P_{s,t} \mathcal{L}_t f.$$

4. 求下面Itô扩散过程的生成元:

(1) $dX_t = -X_t dt + \sqrt{2} dB_t.$

(2) $dX_t = -\nabla V(X_t) dt + \sqrt{2} dB_t,$ 其中 V 是一个光滑函数。

5. (布朗桥) 给定 $a, b \in \mathbb{R}$, 下面一维随机微分方程

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t, \quad 0 \leq t < 1, Y_0 = a$$

的解称为从 a 到 b 的布朗桥(Brownian Bridge)。证明:

$$Y_t = a(1 - t) + bt + (1 - t) \int_0^t \frac{dB_s}{1 - s}, \quad 0 \leq t < 1.$$